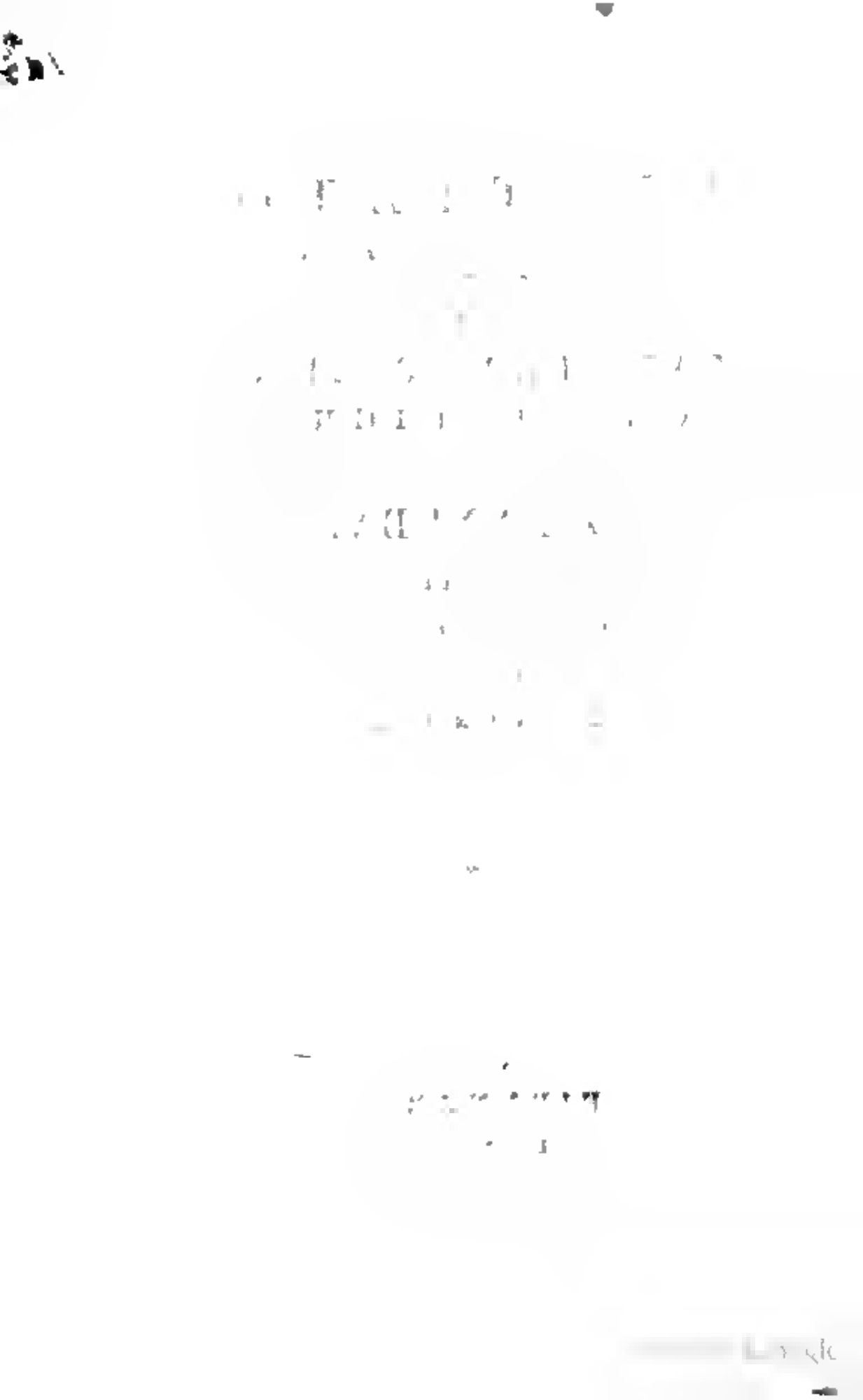
TRATTATO SINTETICO DELLE RAGIONI E PROPORZIONI GEOMETRICHE...

Giovanni Babbini



TRATTATO SINTETICO

DELLE

RAGIONI E PROPORZIONI GEOMETRICHE.

DEFINIZIONI

1. *Proporzione*, o per dir meglio *Ragione* dicesi la relazione, che passa tra due cose del medesimo genere, paragonate ammamente tra loro in ordine alle corrispettivà grandezze.

Allorchè si considera ciò, che sia una qualunque grandezza in confronto di un altra omogenea, dicesi questa maniera di considerarne, e riferir le grandezze *Rapporto*, o *Paragone*, e dai Geometri s'appella *Ragione* Da questo paragone ne nascono l'idee d'eguaglianza, di maggioranza, e di minoranza, non potendosi dire eguale o disuguale, maggiore o minore una cosa, se non si riferisca ad un altra della medesima sorte.

Questo paragone può farsi in due differenti maniere. E primieramente, se si considera di quanto una grandezza è maggiore o minore dell'altra, ossia l'eccesso, o il difetto di una grandezza sopra di un'altra, ed in una parola la loro differenza, questa maniera di paragone dicesi *Ragione Arimmetica*; come se si prendesse a riguardare l'accesso di 7 sopra 5, che è 2, o il difetto di 3 sotto di 8, che è 5. Quest'eccesso, o difetto si nomina l *Esponente della Ragione*. Secondariamente si può considerare quante volte una grandezza contiene un altra, o qual parte eguaglia dell'altra, d'onde ne viene l'idea del duplo, del triplo, della metà, di un terzo ec., e questa dicesi *Ragione Geometrica*, ed il numero di volte, che una quantità contiene un altra omogenea, o la parte, che una quantità pareggia dell'altra, dicesi *Esponente della Ragione* come quando s'osserva quante volte il 12 contiene il 3, ovvero qual parte è il 4 dell'8; l'*Esponente* della prima ragione è 4, e della seconda è $\frac{1}{2}$.

2. Dicesi *Proporzione* in senso stretto presso i Moderni, ovvero *Proporzionalità*, o *Analogia* presso gli Antichi l'unione, o sistema di due Ragioni eguali, cioè, che abbiano

eguali Esponenti; e siccome si hanno due specie diversissime di Ragioni secondo il già detto, così ancora due specie s'ammettono di Proporzioni, una cioè Arimmetica, ed è l'eguaglianza di quegli eccessi, o difetti, che servono d'esponenti, e perciò di misura a due Ragioni assegnata (che sono ancor esse grandezze) come paragonando 1 a 3, e 5 a 7, ove si ha la medesima differenza 2 nell'una, e nell'altra Ragione di minore inegualità si verrebbe a formare dei quattro numeri 1, 3, 5, 7 una Proporzione Arimmetica, che si scrive nel modo seguente 1. 3 : : 5. 7 E quando fosse di tre soli termini, cioè *continua*, come la chiameremo in appresso, si scriverebbe così 3 5 7 ÷

L'altra Proporzione si chiama *Geometrica*, ed è quando si hanno eguali gli esponenti di due ragioni Geometriche, ossia quando s'abbia l'eguaglianza di due *Ragioni* nel confronto, che se ne faccia; così nel paragone delle due Ragioni di maggiore inegualità, quali sono di 12 a 4, e di 9 a 3, dove il 12 contiene tre volte il 4, come il 9 contiene il 3, onde l'esponente nell'una, e nell'altra ragione è il medesimo 3, si dà subito nascita a una Propor-

zione Geometrica, ch esprimesi in questa forma 12. 4 :: 9 : 3, e essendo *continue* come 27, 9, 3, esprimesi nel modo seguente 27: 9: 3 ∺.

3. Allorchè si paragonano due grandezze tra loro, queste diconsi *Termini* del paragone, o della *Ragione* qualunque siesi, ma il primo appellasi *Antecedente*, ed il secondo *Conseguente*.

La Proporzione o Analogia non può sussistere in men di tre termini, ed allora il termine di mezzo una volta si prende per conseguente, e un altra volta per antecedente, ed in tal caso la Proporzione si chiama *continua*, come in questi tre termini 16, 8, 4 quel espressione corrisponde a 16: 8 :: 8: 4, e si scrive più brevemente, come sopra 16: 8: 4 ∺. Se poi i termini della Proporzione sian quattro, come nei casi più ordinarj, di maniera chè i due di mezzo facciano il semplice ufizio di conseguente il primo, e di antecedente il secondo, dicesi *discontinua*, come 8: 4:: 6. 3.

4. Dicesi *Ragion composta* o sivvero star due Grandezze o due termini paragonati fra loro in *Ragion composta* di due o più Ragioni, quando l'esponente di quei due termini è

il prodotto degli esponenti di quelle ragioni, di cui la prima dicesi *composta*. così la ragione di 18 a 4 avendo per esponente il 6. prodotto di 2 per 3, si direbbe a questo riguardo *composta* di due altre, come di 4 a 2, e di 6 a 3, perchè la prima di queste ha per esponente il 2, e l'altra il 3, quali esponenti moltiplicati insieme danno il prodotto 6, esponente della Ragion *composta* suddetta. Ond'è, che se sano più termini, che si paragonino insieme collegati in maniera, che tutti quei di mezzo servano a un tempo di conseguenti, e di antecedenti, avremo, che il primo starà all'ultimo in Ragion *composta* di tutte quelle ragioni concatenate, perchè l'esponente del primo all'ultimo termine, si trova appunto essere il prodotto di tutti gli esponenti delle collegate Ragioni. Siano i termini, per esempio, 24, 8, 6, 3; abbiamo, che il denominatore o esponente della Ragione di 24 a 3 è 8, prodotto ad un tempo di tutti gli esponenti delle Ragioni, cioè di $18 \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{12}{3} \times 2 = 4 \times 2 = 8$. Parimente, se i termini non siano collegati in questa guisa, ma in tante ragioni disgiunte, troveremo, che, se si moltiplicano gli antecedenti fra loro, ed i conseguenti pari-

mente fra loro, conseguiremo due prodotti che paragonati insieme avranno un esponente, che sarà il prodotto degli espoonenti tutti di quelle date ragioni; Così siano date le Ragioni di 6 a 2, di 4 a 2, di 3 a 6, se si moltiplicano gli antecedenti avremo $6 \times 4 \times 3 = 72$, e se si moltiplicano i conseguenti si ha $2 \times 2 \times 6 = 24$. Or se si paragona 72 con 24, avremo l'esponente 3, che è appunto il prodotto degli esponenti di quelle tre ragioni cioè di $3 \times 2 \times \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Ma se l'esponente d'una data ragione, ossia di due termini paragonati fra loro, è un numero quadrato; questa Ragione si può allora considerare, come *composta* di due Ragioni eguali, ed in tal caso questa Ragion *composta* dicesi *Quadrata* o *Duplicata*, come, per esempio, la Ragione di 8 a 2, che ha per esponente 4 numero quadrato di 2 si può considerare come composta di 8 a 4 e di 4 a 2, Ragioni, che sono visibilmente eguali; e perciò se sono tre termini continuamente e geometricamente proporzionali, la Ragion del primo al terzo dicesi *quadrata* o *duplicata*, perchè l'esponente della Ragione di questi due termini è il quadrato dell'esponente di una di quelle due ra-

gioni eguali intermedie; onde se si abbia 12 : 6 : 3, l'esponente di 12 a 3 è 4 numero quadrato dello esponente di 12 a 6, ovvero di 6 a 3. Similmente siccome questa Proporzione geometrica può esprimersi in quest'altra forma apparentemente discontinua, cioè 12 : 6 :: 6 : 3, se si moltiplichino gli antecedenti, e quindi i conseguenti fra loro avremo due prodotti, che staranno in Ragion duplicata o quadrata di una di queste due Ragioni. E difatto $12 \times 6 = 72$ sta a $6 \times 3 = 18$, come 4 a 1; or l'esponente di 72 a 18 è appunto 4 quadrato di 2, esponente tanto di 12 : 6 quanto di 6 : 3. Finalmente s'ottiene ancora la Ragion quadrata o duplicata dalla Ragion di due termini, se si quadrino questi medesimi termini; come, se si volesse la Ragion quadrata di 9 a 3, l'otterremo moltiplicando $9 \times 9 = 81$ e $3 \times 3 = 9$, nella Ragione dei quali due quadrati, cioè di 81 a 9, vi è l'esponente 9 quadrato dell'esponente 3 della Ragion semplice di 9 : 3. Ond'è che se viceversa si voglia la *Ragion subduplicata* di un'altra, ossia una Ragione, che abbia per esponente la radice quadra dell'esponente di un'altra, si estrae la radice quadra dei due termini dati come di 81 e di 9, e

si ritorna ai termini 9 e 3, che danno una Ragione, la quale ha per esponente il 3 radice quadra dell' esponente 9 (potendola avere esatta, come in questo caso, nell' uno e nell'altro termine); ovvero si trova una media proporzionale tra i due termini dati; lo che si fa moltiplicandogli fra loro, e quindi estraendo la radice quadra dal prodotto, che sarà il termine medio della proporzione, composta allora di due eguali Ragioni, ciascuna delle quali è suddupplicata della data, ossia ha per esponente la radice quadra dell'esponente della data Ragione; così la Ragione suddupplicata di 12 a 3 s'ottiene moltiplicando 12 $\times$ 3 = 36, e da questo prodotto estraendo la radice quadra si ha 6, per cui s' ottiene l' Analogia o Proporzione geometrica *continua*, 12 : 6 : 3 La ragion di questa si è, che dati quattro termini geometricamente proporzionali, il prodotto degli estremi è sempre eguale al prodotto dei termini medj; imperocchè siano 12 : 4 :: 9 : 3 avremo per la natura della Proporzione i loro esponenti eguali cioè $\frac{12}{4} = \frac{9}{3}$, e riducendogli al medesimo denominatore si avrà $\frac{12 \times 3}{12} = \frac{9 \times 4}{12}$, laonde, siccome due frazioni eguali dell'istesso denominatore non possono

a meno di non avere necessariamente eguali i numeratori, ne segue $12 \times 3 = 9 \times 4$. Ma il primo di questi prodotti è il prodotto degli estremi, e l'altro quello dei medj: dunque ec.

† Da ciò si deduce, che se sieno tre termini in *continua* Proporzione geometrica, il prodotto degli estremi sarà eguale al quadrato del medio.

Se poi l'esponente della Ragion *composta*, o sia di due quantità paragonate fra loro è un cubo, questa Ragione si può allora considerare come *composta* di tre altre Ragioni eguali, i cui esponenti moltiplicati fra loro diano quest'esponente cubico della Ragione *composta*, quale in tal caso dicesi *cuba* o *triplicata*. Come per esempio la Ragione di 16 a 2, che ha per esponente il cubo 8, si può considerare come composta delle Ragioni di

† 12 a 6, di 4 a 2, e di 6 a 3, ciascuna delle quali ha per esponente il 2; or se questo numero si moltiplichi per l'esponente della seconda, avremo il quadrato 4, e se questo di nuovo si moltiplichi per l'esponente della terza avremo il cubo 8, esponente appunto della data Ragione. L'istesso si dica della Ragione di 27 ad 1, che ha per esponente 27 cubo di 3.

Quindi se si dia la Progressione di 4 termini, come 16 : 8 : 4 : 2; avremo, che il primo sta al quarto in Ragion triplicata o cuba del primo al secondo, o del secondo al terzo ec., perchè l esponente di 16 a 2 è 8 cubo dell' espoonente di ciascuna dell'altra tre eguali Ragioni intermedie, che è 2. Parimente, se si abbiano tre Ragioni eguali, e disgiunte, come 4 : 2, 6 : 3, 8 : 4, s' otterrà la Ragion *triplicata* moltiplicando gli antecedeoti tra loro, ad i conseguenti parimente fra loro come in queste tre ragioni $4 \times 6 \times 8 = 192$, $2 \times 3 \times 4 = 24$. Or la ragione di 192 a 24 è cuba o triplicata d' una qualonque di quelle eguali Ragioni, perchè l'esponente di 192 a 24 è 8 cubo dell' esponente di una di quelle sopraddette.

Finalmente se si faccia il cubo dell' antecedente ed il cubo del conseguente di due termini dati avremo la Ragion *triplicata*, come, per esempio se di 4 a 2 si cuba il 4, che dà 64, e si cuba il 2, che dà 8, avremo l'esponente della Ragione di 64 a 8 eguale al cubo dell' esponente 2 della Ragione, che passa tra i due termini 4 : 2. Quindi è, che se si abbia vicaversa l'esponente di una Ragione, che sia la radice cuba dell'asponeote di un'altra,

si dirà quelle prime *suttriplicate* delle seconda, come la Ragione di 4 e 2 è *suttriplicata* delle Ragione di 16 e 2, di 64 a 8 ec.

5. Dicesi una quantità stare ad un altra in maggior Ragione, allorchè la prima contiene la seconda un maggior numero di volte di quello che un altra terza contenga questa medesima seconda; o eguaglia di essa una parte maggiore, ossia nell'uno, e nell'altro caso quando è meggior l'esponente: così se si abbiano queste tre grandezze $^{12}\ 4\ ^{8}$ dodici a quattro ha maggior proporzione di otto a quattro, perchè il 12 contiene più volte il 4, che l'otto il medesimo 4, ossia l'esponente di 12 a 4 essendo 3 è maggiore dell'esponente di 8 a 4, che è 2. Parimente il 4 eguaglia del 12 una parte minore, che dell'8 onde il 4 paragonato coll 8 s'accosta assai più ad agguagliarlo, che paragonato col 12, ed infatti ecco l'esponente medesimo lo dichiara manifestamente, poichè quello di 4 a 12 è $\frac{1}{3}$, mentre quello di 4 a 8 è $\frac{1}{2}$ ed $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

6. Parti simili di due o più grandezze diconsi quelle, che egualmente sono contenute nelle totali grandezze medesime, o nei

loro respettivi interi; per esempio una terza parte di 12 è simile alla terza parte di 6, cioè 4 è parte simile a 2 considerata quella in confronto di 12, e questa di 6, essendo difatto contenuto il 4 nel 12 un egual numero di volte cioè 3, come il 2 nel 6.

7. *Parte Aliquota* dicesi quella, che è contenuta nel suo tutto, o nel suo respettivo intero un numero qualunque di volte esattamente, cioè senz'avanzo, come il 4 è parte aliquota del 12, il 5 del 10 ec. Laddove se è contenuta un numero qualunque di volte, e quindi vi ha qualche resto, avanzo, od eccesso, allora dicesi parte *aliquanta*, come è il 5 del 12, il 4 del 10 ec.

ASSIOMI.

1. Due quantità eguali hanno ad una terza l'istessa Ragione. così se $a = b$ (fig 1.) avremo $a : c :: b : a$.

2. Se viceversa due grandezze hanno egual ragione ad una terza, esse saranno eguali fra loro, cioè (fig. 1) se $a : c :: b : c$, sarà $a = b$.

3 Se siano due quantità disuguali, la maggiore avrà maggior Ragione ad una terza di quello, che abbia la minore alla medesima terza; ma al contrario questa terza avrà maggior Ragione alla minor quantità, di quello, che alla maggiore; così (fig. 2) se $a > b$, sarà $a : c > b : c$, e viceversa $c : a < c : b$, e ciò per la definizione 5.

4. Se viceversa due quantità abbiano disugual Ragione paragonandole ad una terza, saranno anch'esse disuguali, e maggiore sarà quella, che ha maggior Ragione, ed al contrario sarà maggiore quella, a cui questa terza abbia minor Ragione (fig. 2). Così se $a : c > b : c$, è $a > b$, e se $c : a < c : b$, $a > b$; e ciò per l'istessa definizione 5ª.

5 Quelle Ragioni, che sono simili, o per dir meglio eguali ad una terza, saranno simili, o eguali ancora fra loro: per esempio (fig. 3) Se $a : d :: b : e$, e $c : f :: b : e$, avremo ancora $a : d :: c : f$ (la sostanza non è che l'Assioma 2.° essendo anco le Ragioni grandezze).

6. Se siano quattro grandezze proporzionali, e che un antecedente sia maggior dell'altro, ancora il suo conseguente sarà mag-

giore parimente dell'altro consegoente: per esempio (fig. 4) se $a : c :: b : d$ ed $a > b$, ancora $c > d$.

7. Se un antecedente stà ad un conseguente, come un altro antecedente stà al suo conseguente, ancora, come dicesi, *Invertendo* il primo conseguente starà al primo antecedente, come il secondo conseguente stà al secondo antecedente: così (fig. 4) se $a : c :: b : d$, avremo ancora $c : a :: d : b$.

PROPOSIZIONE.

Se *cb* è parte simile a *fe*, la prima rispetto ad *ab*, e la seconde rispetto a *de*, ancora l'altra parte residua *ac* sarà simile alla residua respettiva *df* (fig. 5)

Imperocchè, se *ab* non stesse ad *ac*, come *de* stà a *df*, starebbe, per esempio, come *de* a *do* maggiore o minore di *df*; laonde sarebbe *ac* nel primo caso parte maggiore di *ab* di quello, che *df* di *de*, onde $ab : ac < ed : df$. Quindi è che si avrebbe inversamente *cb* parte minore di *ab* di quello che *fe* di *de*, e perciò $ab : cb > de : fe$ contro l'Ipotesi. L'istes-

se succederebbe se si prendesse *do* minore di *df*, poichè allora avremmo *ab*: *cb* < *de*: *fe*; onde se *ab* : *cb* :: *de*: *fe*, avremo ancora *ab*: *ac*: : *de*: *df*, lo che dicesi *convertendo*, o *per conversion di ragione*.

COROLLARJ.

1. Se *ab* : *cb* :: *de*: *fe* avremo ancora *ab* : *de* :: *cb*: *fe* :: *ac*: *df*; imperocchè se *ab* stasse a *de* come *cb* ad *oe* maggiore, o minore di *fe* ne nascerebbe il medesimo assurdo della proposizione. Ond'è, che si deduce, che il tutto stà al tutto come una parte simila ad ona parte simile, che le parti simili sono proporzionali fra loro, cioè, che *cb*: *fe* :: *ac*: *df*, e che finalmente se quattro grandezze siano proporzionali, avremo ancora gli antecedenti paragonati fra loro nella Ragione medesima dei conseguenti pur fra loro paragonati, lo che dicesi *Permutando*, o *Alternando*.

2 Stando *ab* : *cb* :: *de*: *fe* avremo ancora *ac*: *cb* : : *df*: *fe*; imperocchè abbiamo *ac*: *df*:: *cb*: *fe*, onde *permutando* *ac*: *cb* : : *df* *fe*; il che dicesi *Dividendo*, cioè se siano quattro

2

Corollari

grandezze proporzionali fra loro, gli antecedenti dell' egoali Ragioni meno i lor consegueoti avranno a questi una Ragione simile o eguale.

3. Se *ac*: *cb* :: *df*: *fe* ancora *ac* + *cb*: *cb*:: *df* + *fe*: *fe*, ovvero *ab*: *bc* :: *de*: *df*; imperocchè abbiamo dimostrato, che le parti simili sono fra loro proporzionali, come ancora alle loro quantità totali od interi; dunque se *ac*: *cb*:: *df*: *fe*, avremo *permutando ac*: *df*:: *cb*: *fe* :: *ab*: *de*, onde *permutando* all' inverso *ab* : *cb* :: *de*: *fe*; il che dicesi *Componendo*; cioè in ogni Proporzione geometrica gli antecedenti delle due egoali ragioni più i lor consegoenti hanno a questi una Ragione simile o eguale.

4. Mentre siano più grandezze tra loro proporzionali tutti gli antecedenti insieme avranno a tutti i conseguenti parimente insieme l'istessa ragione, che ha un antecedente solo d'una Ragione al rispettivo suo conseguente; cioè (fig. 6) se *a*. *d* :: *b*: *e*:: *c*: *f*, avremo *a* + *b* + *c*: *d* + *e* + *f*:: *c*: *f* ec; imperocchè *a*: *d*:: *b*: *e*, *permutando a*: *b* :: *d*: *e*, e componendo *a* + *b*. *b* :: *d* + *e*: *e*; e di nuovo *permutando a* + *b*. *d* + *e* :: *b*: *e*:: *c*: *f*,

perciò permutando $a + b : c :: d + e : f$, onde *componendo* $a + b + c : c :: d + e + f : f$, e finalmente *permutando* $a + b + a : d + e + f :: c : f$ ossia $:: b : e :: a : d$ il che ec.

5. Se $a : b :: d : e$, e di più $b : c :: e : f$ (fig. 7) sarà per l'*Ugualità ordinata* ossia *ex aequo ordinatè* $a : c :: d : f$. Imperocchè $a : b :: d : e$, laonde *permutando* $a : d :: b : e$, parimente $b : c :: e : f$, e *permutando* $b : e :: c : f$. Dunque $a : d :: c : f$ (ass. 5) e di nuovo *permutando* $a : c :: d : f$. Il che ec.

6. Se $a : b :: e : f$, ed inoltre $b : c :: d : e$, sarà ancora per l'*Ugualità perturbata*, ovvero *ex aequo perturbatè* $a : c :: d : f$. E difatto (fig. 8) come $b : c$, si faccia ancora $f : g$ ed avremo (Coroll. 5) $e : c :: e : g$, ma $d : e :: f : g$, e perciò *permutando* $d : f :: e : g$. Avremo dunque (ass. 5) $a : c :: d : f$. Il che ec.

7. Se $a : c :: d : f$, e di più $b : c :: e : f$ (fig 9) avremo ancora $a + b : c :: d + e : f$. Poichè $b : c :: e : f$, *Invertendo* sarà $c : b :: f : e$; Ma $a : c :: d : f$, perciò per l'*egualità ordinata* $a : b :: d : e$, e *Componen-*

do $a + b : b :: d + e : e$. E siccome $b : c :: e : f$, di nuovo per l'*Eguaglianza ordinata* avremo $a + b . a :: d + e : f$. Il che ec.

8. Se siano quattro grandezze disuguali, e geometricamente proporzionali, per esempio, (fig. 10) $A : B :: c : f$, la massima A insieme colla minima f sono sempre maggiori dell'altre due rimanenti intermedie D, c prese insieme. Imperocchè dalla massima A si prenda $a = c$, e dalla D si prenda $d = f$, avremo $A : D :: a : d$, e perciò ancora (Prop.) $b : e :: A : D$, ma $A > D$ per l'Ipotesi: dunque ancora $b > e$. Inoltre, perchè $a = a$, e $d = f$, avremo $a + f = c + d$, onde rapporto a queste eguali grandezze congiunta alla prima la maggiore b, e alla seconda unita la minore e, ne verrà $a + b + f > c + d + e$, cioè $A + f > D + c$. Il che ec.

99 541663

Fig 3

a b c

d e f

Fig 6

a b c

d e f

Fig 8

a d

e

f

g

Fig 10

a A b c

d D e f